

Clasa a XI-a

Soluții

Problema 1

a) $(x_n)_n$ strict crescător; $L = \lim x_n \in \mathbf{R}_+$ nu satisface relația dată de recurență, deci $L = \infty$.

b) Folosind lema Stolz

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x_n^3}}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{x_{n+1}^3} - \sqrt{x_n^3}) = \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\left(y + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^3} - \sqrt{y^3} \right) = \frac{3}{2},\end{aligned}$$

deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^3}{n^2} = \frac{9}{4}$.

Punctaj recomandat: a) 2 puncte; b) aplicarea lemei Stolz 3 puncte; finalizare 2 puncte.

Problema 2

a) Utilizând formula lui $\sin(a-b)$, descompunem $\det A$ într-o sumă de 8 determinanți, fiecare dintre ei este egal cu 0 având coloane proporționale.

b) Dacă $z = r(\cos 2x + i \sin 2x)$, $w = r(\cos 2y + i \sin 2y)$, atunci $|z-w| = 2r|\sin(x-y)|$. Ținând seama de ipoteză și de observația anterioară, determinantul devine

$$\begin{vmatrix} \sin(x_1 - x_{n+1}) & \sin(x_1 - x_{n+2}) & \sin(x_1 - x_{n+3}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin(x_n - x_{n+1}) & \sin(x_n - x_{n+2}) & \sin(x_n - x_{n+3}) & \dots \end{vmatrix}.$$

Dezvoltat, ca la punctul a), obținem o sumă de determinanți nuli.

Punctaj recomandat: a) 4 puncte; b) 3 puncte.

Problema 3

a)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$$

b) (*) Dacă $c < d$ și $f(c) = f(d)$ atunci $f = \text{constant}$ pe $[c, d]$ (densitate și continuitate).

Presupunem că există $a < b$, $f(a) \neq f(b)$: notăm $a_1 = \sup\{x \in [a, b] \mid f(a) = f(x)\}$, $b_1 = \inf\{x \in [a, b] \mid f(b) = f(x)\}$. Rezultă $f(a) = f(a_1)$, $f(b_1) = f(b)$ deci f este constantă pe $[a, a_1]$ și pe $[b_1, b]$. Calculând $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$, obținem contradicție.

Punctaj recomandat: a) 2 puncte; (*) 3 puncte; finalizare 2 puncte.

Problema 4

a) $A^{p-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $A^p = 0_p$.

b) Calcul direct.

c) Relațiile pentru $n = 1, 2, 3$ implică $BC = CB = 0_p$.
 $((B+C)^2 = B^2 + C^2$ implică $BC + CB = 0$; $(B+C)^3 = (B+C)^2(B+C) = B^3 + C^3$,
implică $B^2C + C^2B = 0$ implică $CB(B-C) = 0$ implică $CB(B-C)C = 0$, implică
 $CBC(B+C) = 0$, implică $CBC = 0$ implică $C^2B = B^2C = 0$ implică $0 = CB^2 + CBC =$
 $CB(B+C)$ implică $CB = 0$.)

Relația pentru $n = 1$ implică $AB = BA$, $AC = CA$.

Din b) $B = \begin{pmatrix} b_1 & & * \\ 0 & b_1 & \\ 0 & & b_1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_1 & & * \\ 0 & c_1 & \\ 0 & & c_1 \end{pmatrix}$ și $b_1 + c_1 = 1$. $BC = 0$ implică
 $b_1c_1 = 0$; dacă $b_1 = 0$, C inversabil, deci $B = 0$ (analog $c_1 = 0$).

Punctaj recomandat: a) 2 puncte; b) 2 puncte; c) 3 puncte.